

# 基于最小方差迭代圆拟合的立木胸径提取算法研究

樊 丽,刘晋浩\*,王建利

(北京林业大学 工学院,北京 100083)

**摘 要:**为了提高基于二维激光数据的立木胸径提取算法的精度与稳定性,提出了一种基于最小方差的迭代圆拟合算法。该算法参照最小二乘法得到拟合圆的初始圆心坐标后,以降低半径向量的方差为目的,设定迭代步长,迭代后得到最终圆心坐标,圆心坐标与每个扫描数据点之间的平均距离为拟合半径。运用该算法对实际直径为 680 mm 的立木激光数据进行胸径提取,并与常用的最小二乘圆拟合算法,Nlinfit 算法,Taubin 算法,Pratt 算法进行比较表明,基于最小方差的迭代圆拟合算法得到的拟合圆的直径为 728.944 18 mm,其精度高于其他 4 种常用算法,且拟合圆直径的标准差为 1.926 01,在 5 种算法拟合的过程中稳定性最好。

**关键词:**最小方差;迭代;圆拟合;算法

**中图分类号:**S758.1      **文献标志码:**A      **文章编号:**1001-7461(2016)03-0215-06

## A Iterative Circle Fitting Algorithm for Tree Diameter at Breast Height Based on Minimum Variance

FAN Li,LIU Jin-hao\*,WANG Jian-li

(School of Technology,Beijing Forestry University,Beijing 10083,China)

**Abstract:** An iterative circle fitting algorithm based on minimum variance was proposed to improve the accuracy and stability of DBH extraction algorithm. The initial coordinate of circle center was obtained by referring to least square method. To reduce the variance of the radius vector, iteration step-size was set and iterated to establish the coordinate of circle center. The average distance between circle center coordinate and each scan data point was defined as fitting radius. Based on the algorithm, the diameter at breast height of a standing tree with an actual diameter of 680 mm was extracted; the radius of the fitting circle was 729.944 18 mm. The result was compared with other four algorithms, such as least square circle fitting, Nlinfit, Taubin, and Pratt, the accuracy of the algorithm presented in this paper was the highest and most stable with the standard deviation of iteration diameter of 1.926 01, and the stability was best among the five algorithms.

**Key words:** minimum variance; iteration; circle fitting; algorithm

森林(林分)的估计是森林资源调查的一项主要工作<sup>[1-2]</sup>,单株立木材积的测定是林分蓄积估计的基础工作。单株立木材积主要通过立木材积表确定<sup>[3]</sup>。材积表则是根据树干材积与其胸径、树高等测树因子间的函数关系进行编制。因此,在森林的资源调查中,立木的胸径测量是最重要的任务之一<sup>[4]</sup>。

胸径是胸高直径的简称,是立木测定的最基本因子之一<sup>[5]</sup>。传统的胸径测量方法主要是用标准测量工具,如测树胸径尺,在地面向上 1.3 m 处测量树木的直径。该方法效率低下,且劳动强度较大,不能满足现代林业发展的需求<sup>[6]</sup>。为实现林业自动化,近年国内外研究人员开始探索基于激光数据的

收稿日期:2015-06-30 修回日期:2015-10-25

基金项目:国家林业局引进国际先进林业科学技术项目(2011-4-02)。

作者简介:樊 丽,女,在读硕士,研究方向:森林工程装备及其自动化。E-mail:li\_fanfan\_1011@163.com

\* 通信作者:刘晋浩,男,博士,教授,博士生导师,研究方向:森林工程装备及其自动化。E-mail:liujinhao@vip.163.com

森林结构参数提取算法的研究。王建利<sup>[7]</sup>等搭建一套由线性激光发射器和 CMOS 图像传感器组成的测量系统,获取立木表面轮廓的图像数据,最后采用最小二乘椭圆拟合算法,求取测量目标的极径参数。P. Pueschel<sup>[8]</sup>等采用 FARO Photon 120 三维激光扫描仪对立木进行扫描,分别采用 Lemen 算法,Pratt 算法,Taubin 算法对扫描数据进行圆拟合,得到胸径。采用地面激光(LMS-Z360i; Riegel, Inc.)进行立木扫描后,用圆拟合算法并结合 Hough 变化得到胸径<sup>[9]</sup>。T. Aschoff<sup>[10]</sup>等通过圆拟合算法对立木进行定位,采用 Hough 变换算法进行立木检测,从而得到胸径。目前国内外在立木胸径提取方面已较多使用算法进行圆拟合,为了提高立木胸径提取精度及算法的速度与稳定性,本研究在最小二乘圆拟合算法的基础上,提出一种基于最小方差的迭代圆拟合算法,并与常见的最小二乘圆拟合算法,Nlinfit 算法,Taubin 算法,Pratt 算法进行比较。

1 最小方差迭代圆拟合算法原理

1.1 初始圆心坐标的求解

设直角坐标系下圆心坐标为(A,B),圆半径为R,则圆方程可写成

$$(x-A)^2+(y-B)^2=R^2 \tag{1}$$

极坐标下将拟合圆的圆心坐标设为(m,α),圆上点坐标为(θ<sub>i</sub>,ρ<sub>i</sub>),其中 i 为二维激光扫描仪扫描得到的离散点序号。根据式(1)的形式,极坐标系下圆的方程为

$$\rho_i^2-2m\rho_i\cos(\alpha-\theta_i)+m^2=R^2 \tag{2}$$

设其中一组离散点的坐标为(θ<sub>i</sub>,l<sub>i</sub>),则待求系数为 m,α,R。将(θ<sub>i</sub>,l<sub>i</sub>)代入式(2)可得

$$l_i^2-2ml_i\cos(\alpha-\theta_i)+m^2=r_i^2 \tag{3}$$

计算离差

$$\delta_i=r_i^2-R^2 \tag{4}$$

总离差为

$$F(m,\alpha R)=\sum_{i=1}^n\delta_i=\sum_{i=1}^n(l_i^2-2ml_i\cos(\alpha-\theta_i)+m^2-R^2) \tag{5}$$

为求得初始 m,α,参照最小二乘圆拟合方法,分别求

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial m} &= \sum (2m-2l_i\cos(\alpha-\theta_i)) \\ \frac{\partial F}{\partial \alpha} &= \sum (2l_i\sin(\alpha-\theta_i)) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\frac{\partial F}{\partial R} = \sum -2R$$

由  $\frac{\partial F}{\partial m}=0$  可得,

$$2nm-2\sum l_i\cos(\alpha-\theta_i)=0 \tag{7}$$

得到

$$m=\frac{\sum l_i\cos(\alpha-\theta_i)=0}{n} \tag{8}$$

由  $\frac{\partial F}{\partial \alpha}=0$  可得,

$$2m\sum l_i\sin(\alpha-\theta_i)=0 \tag{9}$$

因为 m≠0,所以

$$\sum l_i\sin(\alpha-\theta_i)=0 \tag{10}$$

将其展开,可得

$$\sin(\alpha)\sum\cos=\cos(\alpha)\sum l_i\sin(\theta_i) \tag{11}$$

解得

$$\alpha=\arctan\left(\frac{\sum l_i\sin(\theta_i)}{\sum l_i\cos(\theta_i)}\right) \tag{12}$$

将求得的(m,α)作为迭代初始拟合圆心坐标。

1.2 圆心坐标的迭代

将初始拟合圆心坐标(m,α)代入式(2)得到初始拟合圆心坐标对应的半径向量 r<sub>i</sub>,求得 i 个半径向量的平均半径向量为  $\bar{r}$ ,计算 i 个半径向量的方差为

$$s^2=\frac{1}{i}[(r_1-\bar{r})^2+(r_2-\bar{r})^2+\dots\dots+(r_i-\bar{r})^2] \tag{13}$$

数据统计学中方差越小,代表这组数据越稳定。因此,半径向量的方差越小,说明拟合的效果越好。为优化圆拟合结果,使得拟合的圆接近实际圆,以降低半径向量的方差为目标,对初始圆心坐标(m,α)进行迭代。迭代之前,需对方差精度系数,初始迭代步长,循环次数以及最小极径步长进行设置,进而求得最终的圆心坐标。圆心坐标与每个扫描数据点之间的平均距离为拟合半径。先迭代求 m,再迭代求 α。m 迭代过程算法流程图如图 1 所示,α 迭代过程同理。

2 算法仿真

为验证算法的有效性,在 MATLAB 环境下绘制半径为 100 mm 的圆(图 2 中黑色实线)。中心线的交点即为实际圆心,设圆心坐标为(0,0),圆的方程在极坐标下可表示为。模拟二维激光扫描仪所得的数据形式,在半径范围为,角度范围为的区域内等概率产生 66 个离散数据点,离散数据点如图 2 中实心圆点所示。

运用本文提出的算法对离散数据点进行圆拟合。根据式(8)及式(12),求得初始圆心极坐标为(9.36,-0.5525),如图 2 中三角形标注所示。设置的步长为 1,的步长为 0.05。方差精度系数设为,即

当半径向量的方差小于方差精度系数与平均半径向量的乘积时,算法结束。循环变量设为 1 000,即当算法循环次数>1 000 时,算法结束。最小极径步长为,即当步长小于时,算法结束。图 2 中,方块标记表示每次迭代计算结束时的圆心坐标,方块 1 表示第 1 次迭代后的圆心坐标,方块 2 表示第 2 次迭代后的圆心坐标,以此类推。最终得到的拟合圆如

图 2 中虚线所示,圆心极坐标为(0.4,0.000 4),拟合圆的半径为 99.884 9 mm。仿真结果显示,经过 4 次重复迭代,圆心逐渐与实际圆心坐标重合,且最终拟合圆的半径误差率仅为 0.001 151。其中,步长和方差精度系数均为经验值,实际应用中应根据数据特征进行设定。

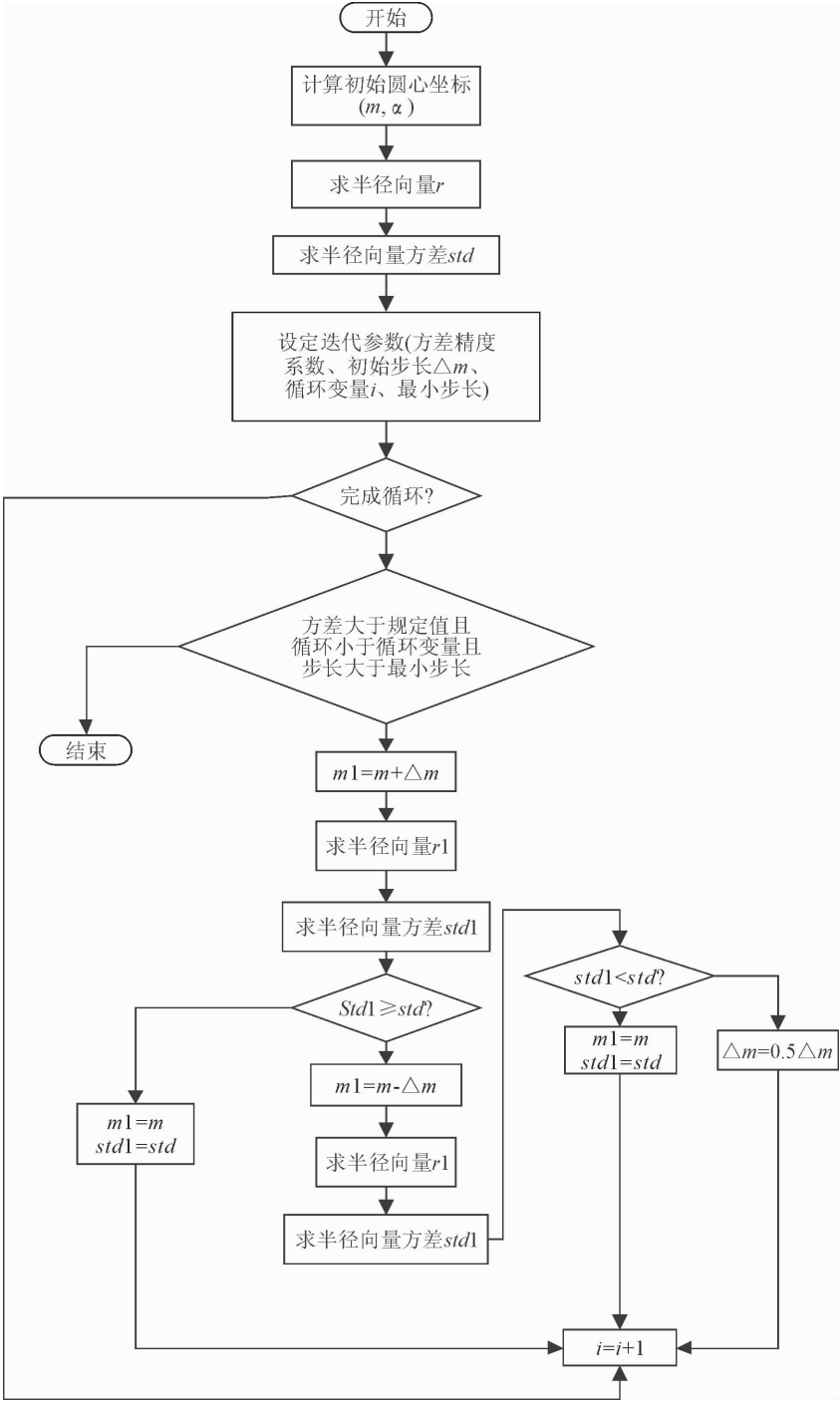


图 1 m 迭代过程算法流程图

Fig. 1 Algorithm flow chart of iterative process about m

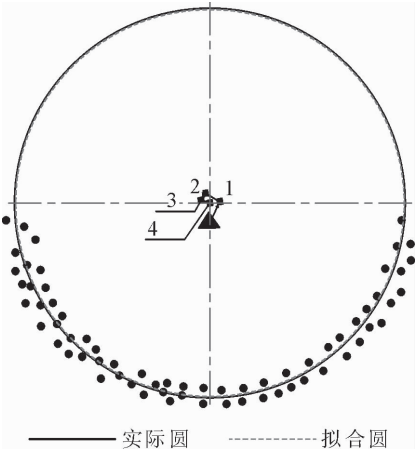


图 2 对离散数据点进行圆拟合的结果  
Fig. 2 Circle fitting result of discrete points

3 算法试验

为了评估本研究中提出的基于最小方差的迭代圆拟合算法的实际运用效果,采用 SICK 公司的 LMS511 二维激光扫描仪在北京林业大学校园内选取 1 株立木进行扫描,被扫描立木(图 3)用林用卡尺测得实际胸径为 680 mm。扫描角度分辨率为 0.166 7度,并重复 50 次,得到 50 组二维激光数据。



图 3 被扫描立木  
Fig. 3 Scanned tree

经过 MATLAB 编程处理,得到第 1 组数据的实际数据点分布(图 4)。采用基于最小方差的迭代圆拟合算法对第 1 组数据进行圆拟合,设置  $m$  的步长为 1,  $\alpha$  的步长为 0.01。方差精度系数为  $10^{-3}$ ,循环变量为 1 000,最小步长为  $10^{-6}$ 。进行 4 次重复迭代后,得到的拟合结果如图 5 所示,拟合圆的圆心坐标为 (461.104 7, 33.143 8),拟合圆的直径为 686.798 66 mm。

计算该算法所得结果的拟合精度,拟合精度的计算公式为式(15):

$$V=1-\frac{|D_f-D|}{D}$$

(15)

式中: $V$ ——拟合精度; $D_f$ ——由圆拟合算法得到的拟合圆的直径; $D$ ——立木实际胸径。

经计算得到:基于最小方差的迭代圆拟合算法进行的圆拟合拟合精度为 0.990 02。同时,运用常用的最小二乘圆拟合算法<sup>[11]</sup>,Nlinfit 算法<sup>[12-13]</sup>,Taubin<sup>[14]</sup>算法以及 Pratt<sup>[15]</sup>算法分别对图 4 中的第 1 组数据进行拟合,并与本文的算法进行比较,其结果如图 6 所示。

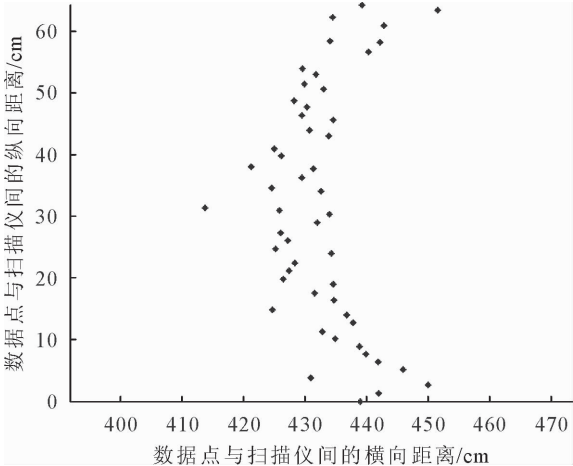


图 4 实际扫描数据点  
Fig. 4 Actual scan datum points

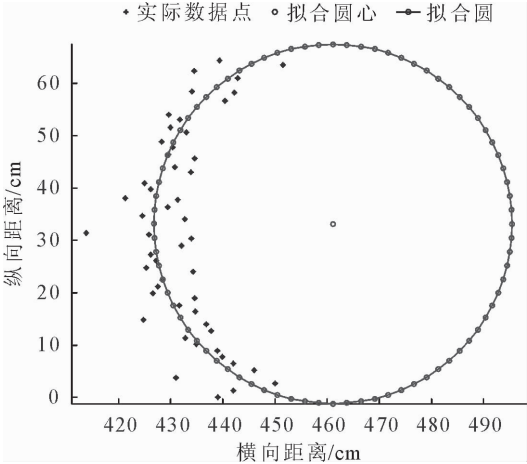


图 5 拟合结果  
Fig. 5 Fitting result

经最小二乘圆拟合算法得到的拟合圆的圆心坐标为 (451.318 4, 32.671 6),拟合圆的直径为 543.816 34 mm,拟合精度为 0.200 270。

经 Nlinfit 算法得到的拟合圆的圆心坐标为 (451.318 4, 32.671 6),与经最小二乘圆拟合算法得到的圆心坐标相同,拟合圆的直径为 543.448 44 mm,拟合精度为 0.799 189。

经 Taubin 算法得到的拟合圆的圆心坐标为 (460.119 5, 33.010 8),拟合圆的直径为 675.122 14 mm,拟合精度为 0.992 897。

经 Pratt 算法得到的拟合圆的圆心坐标为 (459.941 1,33.004 1),拟合圆的直径为 681.621 82 mm,拟合精度为 0.997 615。

依次对 50 组测量数据进行圆拟合,每组数据算法得到的拟合直径如图 7 所示。分别对各算法的 50 组直径取平均值得表 1。

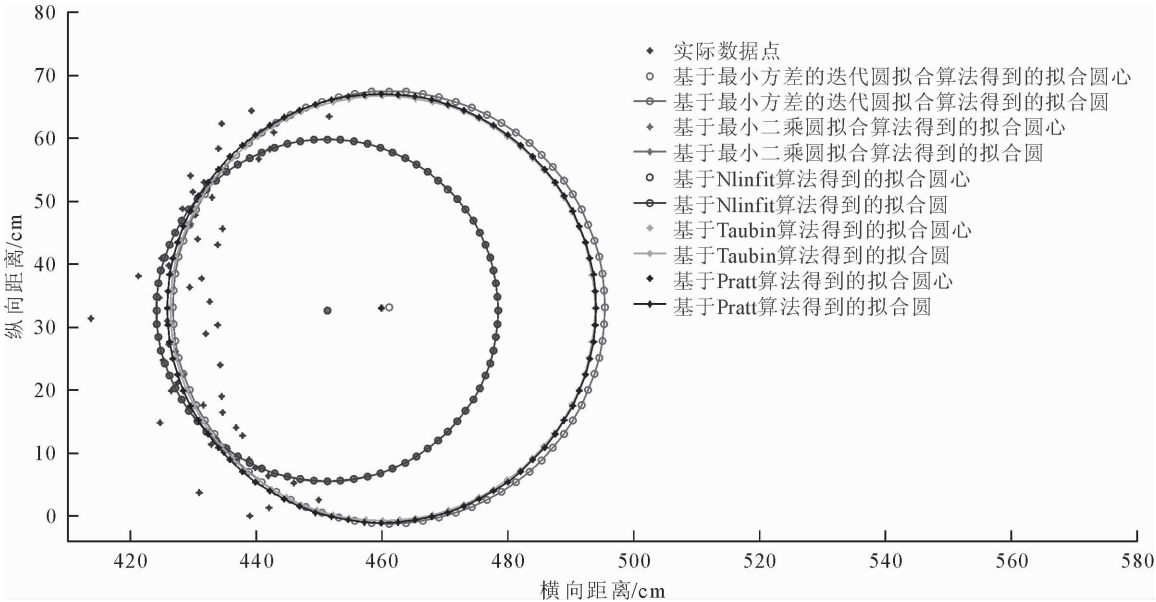


图 6 不同算法对第一组测量数据进行圆拟合的结果

Fig. 6 Circle fitting results of the first set of measurement data with different algorithms

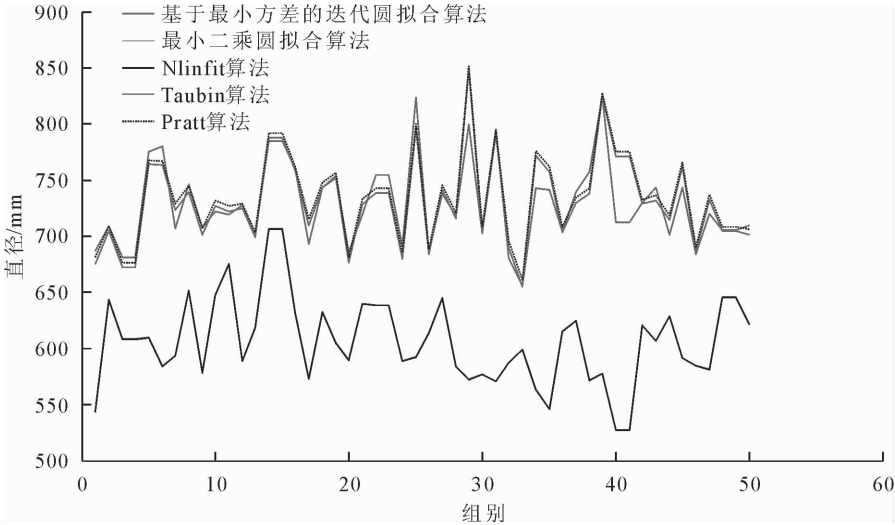


图 7 不同算法对 50 组测量数据进行圆拟合得到的直径

Fig. 7 Circle fitting diameters of 50 sets of measurement data with different algorithms

表 1 不同算法对 50 组数据进行圆拟合得到的平均直径  
Table 1 Average circle fitting diameters of 50 sets of measurement data by different algorithms

算法名称	拟合得到的平均直径/mm
基于最小方差的迭代圆拟合算法	728.944 18
最小二乘圆拟合算法	606.697 94
Nlinfit 算法	606.366 88
Taubin 算法	731.090 16
Pratt 算法	735.499 56

此外,各算法在进行每组数据的拟合时,其结果相对误差率如图 8 所示。分别对各算法的 50 组相

对误差率取平均值得表 2。

表 2 不同算法对 50 组数据进行圆拟合得到的直径的平均拟合精度

算法名称	平均拟合精度
基于最小方差的迭代圆拟合算法	0.926 613
最小二乘圆拟合算法	0.889 069
Nlinfit 算法	0.888 615
Taubin 算法	0.922 007
Pratt 算法	0.916 874

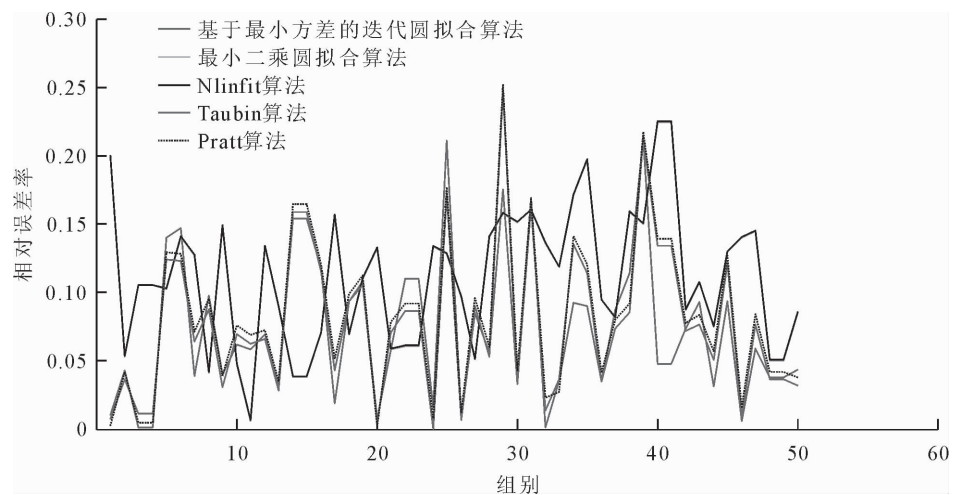


图 8 不同算法对 50 组测量数据进行圆拟合得到的相对误差率

Fig. 8 Circle fitting relative error of 50 sets of measurement data with different algorithms

基于最小方差的迭代圆拟合算法,Nlinfit 算法以及 Taubin 算法得到的结果优于其他 2 种算法,其中以基于最小方差的迭代圆拟合算法得到的结果最接近实际值(图 7、图 8,表 1、表 2)。

为了比较各算法的稳定性,计算各算法所得到的 50 组拟合圆直径的标准差(表 3)。基于最小方差的迭代圆拟合算法、最小二乘圆拟合算法以及 Nlinfit 算法的稳定性优于 Taubin 算法以及 Pratt 算法,其中,基于最小方差的迭代圆拟合算法得到的拟合圆直径的标准差最小,即稳定性最好。

表 3 不同算法对 50 组数据进行圆拟合得到的直径的标准差

Table 3 Standard deviation of circle fitting diameters of 50 sets of measurement data with different algorithms	
算法名称	拟合圆直径的标准差
基于最小方差的迭代圆拟合算法	1.926010
最小二乘圆拟合算法	1.939511
Nlinfit 算法	1.940555
Taubin 算法	2.051404
Pratt 算法	2.023198

4 结论与讨论

为提高立木胸径的提取效果,本研究提出一种新的基于最小方差的迭代圆拟合算法。运用该算法对一株实际胸径为 680 mm 的立木进行圆拟合,得到拟合圆的直径为 728.944 18 mm,拟合精度为 0.926 613,拟合过程的标准差为 1.926 010。此外,将该算法分别与最小二乘圆拟合算法、Nlinfit 算法、Taubin 算法以及 Pratt 算法进行比较,结果表明,运用本研究提出的算法进行拟合所得到拟合精度最高,且算法的稳定性最好。该算法为今后立木胸径的测量研究提供了依据。

基于最小方差的迭代圆拟合算法很好地提高了立木胸径的拟合精度,且算法具有较高的稳定性,但是该算法在进行圆心坐标迭代的过程中,不能根据数据特点自动设置步长以及方差精度系数,后续的研究将主要围绕这方面展开。

参考文献:

[1] 刘平,王玉涛,马履一. 油松人工林单木胸径生长过程模拟及检验[J]. 西北林学院学报,2010,25(4):139-143.  
LIU P,WANG Y T,MA L Y. Dynamic prediction and verification of individual tree DBH growth process of the *Pinus tabulae* formis plantation[J]. Journal of Northwest Forestry University,2010,25(4):139-143. (in Chinese)

[2] 任瑞娟,亢新刚,杨华. 天然林单木生长模型研究进展[J]. 西北林学院学报,2008,23(6):203-206.  
R J,KANG X G,YANG H. Review on growth model of individual-tree in nature forest[J]. Journal of Northwest Forestry University,2008,23(6):203-206. (in Chinese)

[3] 刘恩斌. 广东二元立木材积表的编制与改进方法的研究[D]. 南京:南京林业大学,2005.

[4] 邓向瑞,冯仲科,马钦彦,等. 三维激光扫描系统在立木材积测定中的应用[J]. 北京林业大学学报,2007(Supp. 2):74-77.  
DENG X R,FENG Z K,MA Q Y,*et al.* Scanning system in mensurating standing volume[J]. Journal of Beijing Forestry University,2007(Supp. 2):74-77. (in Chinese)

[5] 侯鑫新,谭月胜,钱桦,等. 一种基于单 CCD 与经纬仪的树木胸径测量方法[J]. 计算机应用研究,2014(4):1225-1228.

[6] 程朋乐,刘晋浩,王典. 融合激光和机器视觉的立木胸径检测方法[J]. 农业机械学报,2013(11):271-275.  
CHENG P L,LIU J H,WANG D. Measuring diameters at breast height using combination method of laser and machine vision[J]. Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery,2013(11):271-275. (in Chinese)

LI F. A comparative researches on landscape diversity changes in two typical desertification areas——impacts of landscape matrices [J]. *Acta Ecologica Sinica*, 2002, 22(9): 1507-1511. (in Chinese)

[8] 王晓燕,徐志高,杨明义,等. 黄土高原小流域景观多样性动态分析[J]. *应用生态学报*, 2004, 15(2): 273-277.

WANG X Y, XU Z G, YANG M Y, *et al.* Analysis of the landscape diversity dynamics of small watershed in the Loess Plateau [J]. *Chinese Journal of Applied Ecology*, 2004, 15(2): 273-277. (in Chinese)

[9] 孟京辉,陆元昌,CHRISTOPH K,等. 基于遥感的景观格局时空动态研究[J]. *西北林学院学报*, 2010, 25(1): 207-211.

MENG J H, LU Y C, CHRISTOPH K, *et al.* Spatial and temporal dynamics of landscape based on remote sensing [J]. *Journal of Northwest Forestry University*, 2010, 25(1): 207-211. (in Chinese)

[10] 索安宁,于永海,韩富伟. 辽河三角洲盘锦湿地景观格局变化的生态系统服务价值响应[J]. *生态经济*, 2011(6): 147-151.

[11] 邹昶和,李新通,高文兰,等. 拉市海流域景观多样性空间特征分析[J]. *福建师范大学学报:自然科学版*, 2012, 28(3): 65-71.

ZOU C H, LI X T, GAO W L, *et al.* Spatial variation characteristics of landscape diversity in watershed of Lashihai [J]. *Journal of Fujian Normal University: Natural Science Edition*, 2012, 28(3): 65-71. (in Chinese)

[12] 刘红玉,吕宪国,张世奎. 三江平原流域湿地景观多样性及其 50 年变化研究[J]. *生态学报*, 2004, 24(7): 1472-1479.

LIU H Y, LV X G, ZHANG S K. Landscape biodiversity of wetlands and their changes in 50 years in watersheds of the Sanjiang Plain [J]. *Acta Ecologica Sinica*, 2004, 24(7): 1472-1479. (in Chinese)

[13] 孙恺,杨延征,赵鹏祥,等. 基于遥感技术的西安城市景观格局时空演变及分析[J]. *西北林学院学报*, 2015, 30(2): 180-185.

SUN K Y, YANG Y Z, ZHAO P X, *et al.* Spatial temporal evolution of landscape pattern in Xi'an based on 3S technology [J]. *Journal of Northwest Forestry University*, 2015, 30(2): 180-185. (in Chinese)

[14] 玉苏普江·艾麦提,阿里木江·卡斯木,艾克拜尔·买提尼牙孜. 基于遥感的乌鲁木齐市景观格局演变分析[J]. *西北林学院学报*, 2015, 30(2): 172-179.

YUSUPUJIANG A, ALIMUJIANG K, AKBAR M. Landscape dynamic change analysis of Urumqi based on remote sensing [J]. *Journal of Northwest Forestry University*, 2015, 30(2): 172-179. (in Chinese)

[15] 蔡元帅,曲波,吕久俊. 盘锦地区景观多样性及其变化研究[J]. *西北林学院学报*, 2015, 30(4): 277-282.

CAI Y S, QU B, LV J J. Research on the changes of landscape diversity in Panjin area [J]. *Journal of Northwest Forestry University*, 2015, 30(4): 277-282. (in Chinese)

(上接第 220 页)

[7] 王建利,李婷,王典,等. 基于光学三角形法与图像处理的立木胸径测量方法[J]. *农业机械学报*, 2013(7): 241-245.

WANG J L, LI T, WANG D, *et al.* Measuring algorithm for tree's diameter at breast height based on optical triangular method and image processing [J]. *Transactions of the Chinese Society for Agricultural Machinery*, 2013(7): 241-245. (in Chinese)

[8] PUESCHEL P, NEWNHAM G, ROCK G, *et al.* The influence of scan mode and circle fitting on tree stem detection, stem diameter and volume extraction from terrestrial laser scans [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2013, 77: 44-56.

[9] BIENERT A, SCHELLER S, KEANE E, *et al.* Tree detection and diameter estimations by analysis of forest terrestrial lasers canner point clouds [C]//Rönnholm P, Hyypä H, Hyypä J. *Proceedings of the ISPRS workshop "laser scanning 2007 and silvilaser 2007"*. Espoo, Finland: 2007: 50-55.

[10] ASCHOFF T, THIES M, SPIECKER H. Describing forest stands using terrestrial laser-scanning [J]. *Remote Sensing and Spatial Information Sciences*, 2004, 35(Part B): 237-241.

[11] 夏菁. 椭圆拟合方法的比较研究[D]. 广州:暨南大学, 2007.

[12] 包翠莲,开小明. MATLAB 语言在多元线性回归中的应用 [J]. *安徽教育学院学报*, 2005(3): 55-56.

BAO C L, KAI X M. The use of MATLAB in multiple linear regression [J]. *Journal of Anhui Institute of Education*, 2005(3): 55-56. (in Chinese)

[13] 杨洪,林大伟,张宏礼. MATLAB 中三个适于数据拟合命令的比较分析[J]. *大庆师范学院学报*, 2010(6): 58-61.

YANG HONG, LIN D W, ZHANG H L. Comparison and analysis of three order being suitable for data fitting in MATLAB [J]. *Journal of Daqing Normal University*, 2010(6): 58-61. (in Chinese)

[14] 金凌晨,杨定礼. 基于 Taubin 拟合方法的眼睛定位算法 [J]. *淮阴工学院学报*, 2013(3): 21-25.

JIN L C, YANG D L. The method of eye location based on Taubin Fitting [J]. *Journal of Huaiyin Institute of Technology*, 2013(3): 21-25. (in Chinese)

[15] 杨堃. 穿墙有生体探测信号处理研究 [D]. 南京:南京理工大学, 2014.