

基于 ABAQUS 有限元法的空洞树干强度分析

吴贻军¹,姚剑飞¹,吴俊¹,王福利^{2*},邵卓平²

(1. 黄山风景区管委会 园林局,安徽 黄山 245800;2. 安徽农业大学 林学与园林学院,安徽 合肥 230036)

摘要:树木空洞可能会导致树木的死亡,同时,由于空洞树木抗风雪能力低,易在空洞处断裂,对人身和财物安全具有重大隐患。本研究通过软件 Abaqus 建立空心树干的三维模型进行有限元模拟分析,探索树干空洞的大小对树木强度和断裂破坏行为的影响。结果表明:1)树木发生弯曲和扭转破坏系数随载荷增加而增大,树干最外层的最大弯曲和扭转剪应力在断裂破坏前随载荷增加呈线性增加;2)当树干空洞发展到树干内外径比(α)为 0.7 时,随着空洞的继续增大其弯曲和扭转破坏系数会急剧增加,在 α 小于 0.7 时,弯曲和扭转破坏系数有一定的增加,但增加幅度较小;3)随着树干空洞造成内外径比的增加,树木发生扭转破坏的偏冠程度会逐渐降低。研究初步探明了树干空洞影响树木破坏行为和方式的力学机理,可为树木安全性评估提供一定的理论支持和依据。

关键词:树木;空洞;有限元模拟;弯曲扭转强度;断裂行为

中图分类号:S781.21 **文献标志码:**A **文章编号:**1001-7461(2022)03-0205-06

Strength Analysis of Cavity Tree Trunks by Finite Element Method Based on Abaqus

WU Yi-jun¹, YAO Jian-fei¹, WU Jun¹, WANG Fu-li^{2*}, SHAO Zhuo-ping²

(1. Bureau of Park and Wood of Huangshan Scenic Area Management Committee, Huangshan 245800, Anhui, China;

2. School of Forestry and Landscape, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, Anhui, China)

Abstract: Trees with hollow trunks could result in the death of tree, meanwhile, it would bring serious safety issues to human body and belongs, because it would fracture at hollow trunk for its low resistance to wind and snow. To understand the influence of hollow size of trunk on the strength and fracture behavior of trees, a three-dimensional model of the hollow trunks was established by Abaqus for finite element mechanical analysis. The results showed that 1) the bending and torsional damage coefficients of trees increased with the increase of load, and the maximum bending and torsional shear stresses in the outermost layer of the trunk increased linearly with load before fracture damage. 2) When the trunk cavity developed to the trunk inner with an outer diameter ratio (α) of 0.7, its bending and torsional damage coefficient increased sharply as the trunk cavity increased continuously, and when α was less than 0.7, the bending and torsional damage coefficients had a certain increase, but the increment was small. 3) With the increase of the inner and outer diameter ratio caused by the trunk cavity, the degree of crown deviation where the tree first underwent torsional damage would gradually decrease. The mechanical mechanism of the influence of trunk cavity to the fracture behavior and pattern of tree was revealed preliminarily by this study.

Key words:tree; cavity; finite element simulation; bending and torsional strength; fracture behavior

古树名木和高大行道树在经历了长期的风雨洗礼后,均可能存在因腐朽造成的空洞现象,它们在强

风雪载荷下可能发生断裂倒伏而造成行人生命安全
隐患和财产损失。自然界中,受风雪载荷作用,树干

收稿日期:2021-07-21 修回日期:2021-09-08

基金项目:国家自然科学基金面上项目(31570715)。

第一作者:吴贻军,博士,工程师。研究方向:森林资源保护、生物质材料力学。E-mail:wuyijun28@163.com

*通信作者:王福利,博士,讲师,硕士生导师。研究方向:生物质材料断裂力学。E-mail:wangfuli@ahau.edu.cn

会发生弯曲、扭转甚至弯扭组合变形,树干的弯曲断裂就是一种常见的破坏类型,尤其是在中龄林和成熟林中表现更为突出^[1-3]。另一方面,树木是一种多胞层状天然复合材料,树干在某种程度上是由同心圆筒状(年轮层次)的薄层组成,在宏观力学行为上可视之为一种典型的圆柱对称性复合材料,并在强度和刚度方面展示了强烈的各向异性性质,表现为木材沿顺纹方向的抗拉强度可达150~300 MPa,但横向抗拉强度和顺纹抗剪强度仅为前者的1/40~1/20和1/20左右^[4],因此,由风力雪载引起的横向张力与剪切力极易引发树干沿顺纹方向的劈裂,但当树木偏冠严重或树干因腐朽存在大空洞时,树干常常是先发生扭转劈裂或横裂使之丧失了整体刚度后再折断^[5-6]。

目前,采用力学方法分析风雪载荷下的树木强度越来越受到重视^[7-10],同时认为,当受风雪载荷下树干最外层的轴向应力超过了材料的临界应力强度时就会发生破坏^[11-13]。有限元方法因其数值模拟便于多工况加载分析以及精准的计算精度等优势而逐渐被研究者应用于树木抗风性研究和指导林业生产^[14-18]。本研究利用已测定的树木生材力学性质数据为基础,采用有限元数值模拟方法,利用Abaqus有限元软件建立树干的三维模型,分析树干因腐朽空洞造成的不同内外径比,以及受不同弯扭矩比下的树干最外层应力变化,判断不同程度空洞树木的破坏行为和方式,为树木安全性评估提供一定的理论支持和依据。

1 材料与方法

1.1 弯、扭载荷作用的空心树干受力模型建立

树干由树皮、形成层、木质部等组成,树干木质部内部含有节子、树脂道、管孔等不同的结构组分,应用有限元软件分析时,需在软件中对实物建立数值模拟的几何模型。树皮主要为运送养料,形成层多为单列细胞层起分生作用,对树干的力学强度影响微弱。用于测定树木树干材料力学性质的试件取之于木质部,包含了木质部内部的节子、树脂道等不同结构组分,基本反映了树干呈现的真实力学性质。因此,本研究以力学分析为目的时,可将其简化处理

并假设木材细胞腔等间隙填满物质,木材是连续均匀的,而且心边材及树干不同高度处相应的材料力学性质一致。另外,为促使树干受到不同的弯矩与扭矩作用,在树干模型顶端上增加一加载杆,建立树干基本受力模型(图1),即Γ形空心圆树干在自由端受F力作用,高为H、偏心距为e、内径为d、外径为D,树干基部为固定端约束。

1.2 有限元静力学分析

材料定义时,由于木材是正交各向异性材料,定义材料属性需建立柱坐标系对应树干的力学性质。树干轴向L用1表示,弦向T用2表示,径向R用3表示, E_i 为弹性模量, ν_{ij} 为泊松比, G_{ij} 为剪切弹性模量(i,j 为1、2、3,表示不同方向),则在Wood材料属性中, $E_1=E_L,E_2=E_T,E_3=E_R,\nu_{12}=\nu_{TL},\nu_{13}=\nu_{RL},\nu_{23}=\nu_{RT},G_{12}=G_{TL},G_{13}=G_{RL},G_{23}=G_{RT}$ 。以黄山松(*Pinus taiwanensis*)为研究对象,其生材的弹性常数见表1,弯曲强度为33.59 MPa,顺纹剪切强度7.19 MPa。定义加载杆材料属性时,因其仅是为便于施加集中载荷,起辅助作用,不需要分析其力学变化,同时,为消除低弹性模量而产生大的弹性变形对加载效果的影响,定义其弹性模量为具有高弹性模量属性合金钢^[19]材料的10倍,即令其弹性模量为2 000 GPa,泊松比为0.3。

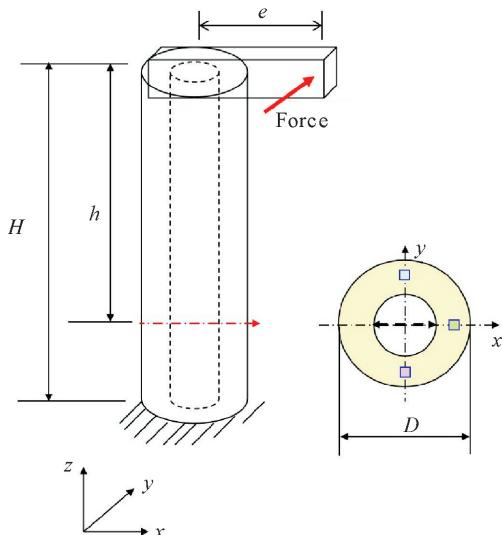


图1 简化的Γ形空心圆树干受力模型

Fig. 1 The simplified mechanical model of a Γ type hollow trunk

表1 黄山松生材的弹性常数

Table 1 The elasticity coefficients of green wood of *Pinus taiwanensis* Hayata

弹性常数	E_1/MPa	E_2/MPa	E_3/MPa	ν_{12}	ν_{13}	ν_{23}	G_{12}/MPa	G_{13}/MPa	G_{23}/MPa
数值	9 863.812	448.47	541.188	0.048 9	0.029 7	0.599 2	725.034	56.808	215.556

网格划分时,选择C3D8R单元作为网格划分单元,该单元为三维的8结点六面线性减缩积分单元,

相比较完全积分单元,其在每个方向上少用1个积分点,仅在单元中心包含1个积分点,优点是在承受

弯曲载荷作用下不发生剪切自锁现象而引发计算错误和可能造成的计算不收敛,且当受扭曲变形时,分析的精度不受影响。结果查看中,为得到树干指定高度处截面的最外层应力变化情况,可在指定高度截面的应力值云图(图2)中选择树干最外层一圈路径结点应力值导出,再进行相关数据分析。

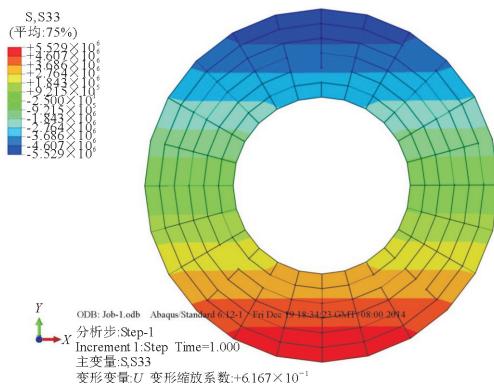


图2 截面应力值云图

Fig. 2 The stress cloud of the cross section

为研究不同程度空洞树木的强度和断裂破坏方式,本研究建立了高 $H = 9.1$ m,外径 $D = 0.77$ m 的黄山松树干基本模型,分析:1)因 $d/D = \alpha$ ($\alpha = 0.1 \sim 0.9$)变化,即空洞大小变化,扭矩不变,指定树干高度处截面最外层上单元应力的变化情况;2)因 $e/h = \beta$ ($\beta = 0.1 \sim 0.5$)变化,即扭矩发生变化,树干空洞大小不变,指定树干高度处截面最外层上单元应力的变化情况;3)比较分析因 α 与 β 的变化,指定高度处截面最外径上,弯曲应力与扭转剪应力的变化情况。

2 结果与分析

2.1 树干破坏系数与载荷的关系

破坏系数指树干受载荷作用下树干外层的最大应力与其相应临界应力强度值的比值。图3是黄山松内外径比, $\alpha = 0.5$,树干指定高度 1.3 m 处截面扭矩与弯矩比, $\beta = 0.1$ 时,树木破坏系数随施加载荷力 F 的变化情况。可知弯曲破坏系数与扭转破坏系数均随着 F 的增大而增加,即树干最外层最大弯曲应力和扭转剪应力均随着载荷 F 的增大而增加,且在断裂破坏前呈线性关系。

2.2 树干破坏系数随树干内外径比和扭矩与弯矩比的变化情况

图4是黄山松自由端受同一载荷作用,树干指定截面高度 1.3 m 处树干破坏系数随树干内外径比(α)和扭矩与弯矩比(β)的变化情况。可以发现:1)树干可能发生的弯曲破坏系数在内外径比 $\alpha = 0.7$ 时,随着树干空洞的继续增大其弯曲破坏系数

会急剧增加,在 $\alpha < 0.7$ 时,弯曲破坏系数有一定的增加,但增加幅度较小。即树木因空洞造成的树干内外径比为 0.7 是树木可能发生断裂的临界值,这与前人野外统计得到的结论相一致^[5,20]。2)树干可能发生的弯曲破坏系数并不会随着树木指定截面高度处承受的扭矩与弯矩比值(β)变化而发生变化,即不受树木偏冠的程度大小影响。3)树干可能发生的扭转破坏系数在内外径比为 0.7,即 $\alpha = 0.7$ 时,随着树干空洞继续增大其扭转破坏系数也急剧增加,在 $\alpha < 0.7$ 时,扭转破坏系数有一定的增加,但变化幅度较小,与弯曲破坏系数趋势一致。4)树干可能发生的扭转破坏系数会随着树木指定截面高度处承受的扭矩与弯矩比值(β)的增大而增加。

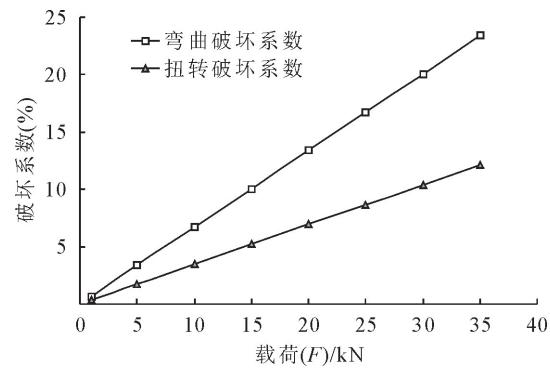


图3 树干破坏系数与载荷的关系

Fig. 3 The curve of Load vs. Damage coefficient of a trunk

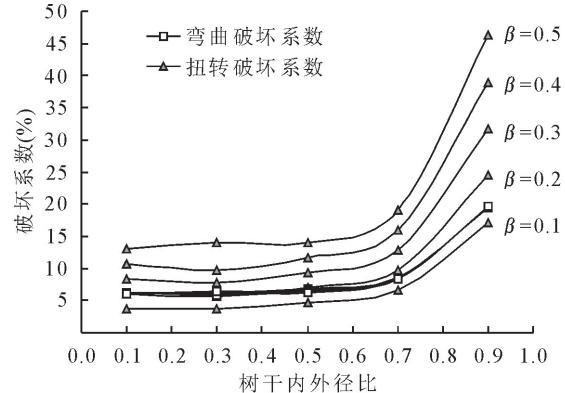


图4 树干破坏系数与树干内外径比(α)和指定高度处截面扭矩与弯矩比(β)关系

Fig. 4 The curve of damage coefficient of a trunk vs. α and β

黄山松树干指定高度 1.3 m 处截面受集中载荷破坏系数随扭矩与弯矩比(β)和树干内外径比(α)的变化情况见图5。

由图5可见:1)对于树干内外径比 $\alpha \leq 0.5$ 时,当树干指定截面高度处扭矩与弯矩比 $\beta \leq 0.2$ 时,树干可能发生的扭转破坏系数均小于弯曲破坏系数,即树干主要发生弯曲破坏,也就是说,当树木空洞形成的树干内外径比在 0.5 以下,且指定高度处树干扭矩与弯矩比在 0.2 以下,树木主要发生弯曲破坏;而当 $\beta > 0.2$ 时,树干可能发生的扭转破坏系数均大于弯曲破

坏系数,即树干首先发生扭转破坏。2)对于树干内外径比 $\alpha=0.7$ 时,当树干指定截面高度处扭矩与弯矩比 $\beta<0.2$,约等于0.16时,树干可能发生的扭转破坏系数小于弯曲破坏系数,即主要发生弯曲破坏;而当 $\beta>0.16$ 时,树干发生的扭转破坏系数大于弯曲破坏系数,即树干首先发生扭转破坏。3)对于树干内外径比 $\alpha=0.9$ 时,当树干指定截面高度处扭矩与弯矩比 $\beta<0.15$,约等于0.13时,树干可能发生的扭转破坏系数小于弯曲破坏系数,即主要发生弯曲破坏;而当 $\beta>0.13$ 时,树干发生的扭转破坏系数大于弯曲破坏系数,即树干首先发生扭转破坏。

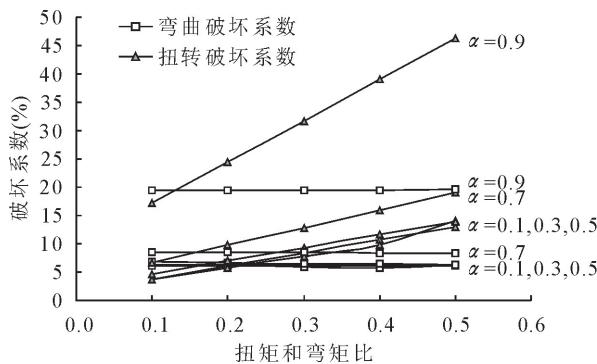


图5 破坏系数与扭矩和弯矩比(β)的关系

Fig. 5 The curve of damage coefficient of a trunk vs. β

由上述分析可知,随着树干空洞造成的内外径比增加,树木首先发生扭转破坏的偏冠程度会逐渐降低,再次证明了当树木生长到一定的偏冠程度,会因树干空洞的增加,树木先发生扭转破坏后,造成树干整体刚度的降低再引发树干折断。

3 结论与讨论

3.1 结论

利用有限元方法分析了树木指定截面高度处不同内外径比和不同扭矩与弯矩比下树干最外层的应力变化情况,探讨树木破坏的方式。结果表明,树木发生弯曲和扭转破坏系数随载荷增加而增大,树干最外层的最大弯曲和扭转剪应力随载荷增加呈线性增加;同时,当树干的空洞发展到树干内外径比 $\alpha=0.7$ 时,随着树干空洞的继续增大其弯曲和扭转破坏系数会急剧增加,在 $\alpha<0.7$ 时,弯曲和扭转破坏系数有一定的增加,但增加幅度较小。这为林业工作者对含有腐朽空洞的古树名木、高大行道树及庭荫树采取支撑拉纤等保护措施的介入时机提供了参考和依据。此外,研究还发现,随着树干空洞造成内外径比的增加,树木首先发生扭转破坏的偏冠程度会逐渐降低,这与前人的研究结果相一致^[5-6],再次

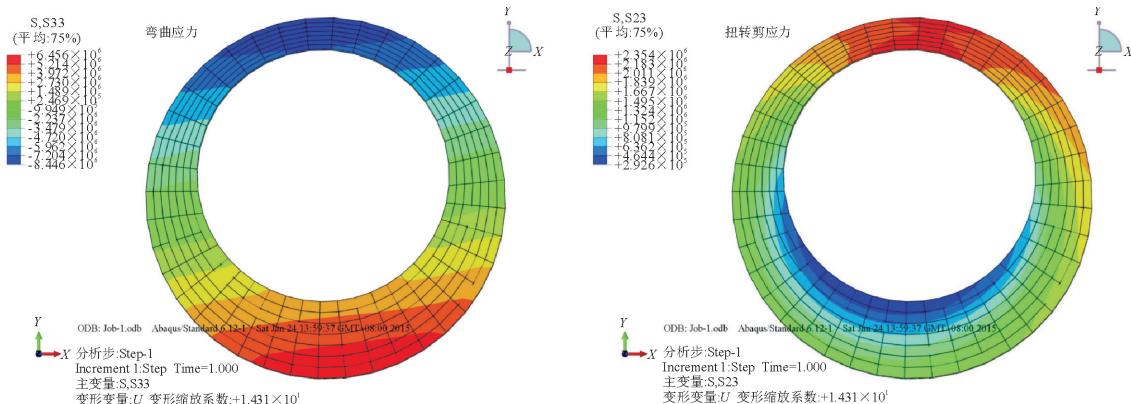


图6 圆形树干偏心圆形树洞树干应力云图

Fig. 6 The stress nephogram of circular stem with an eccentric circular hollow

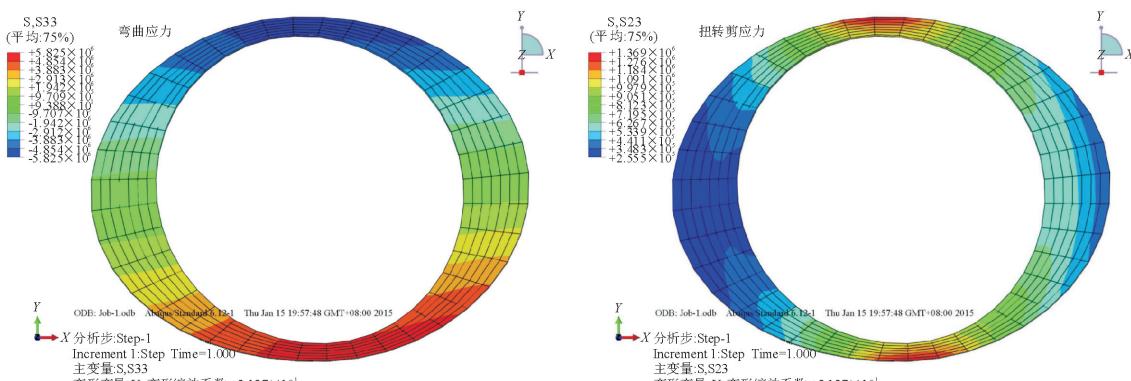


图7 椭圆树干圆形树洞树干应力云图

Fig. 7 The stress nephogram of elliptical stem with a circular hollow

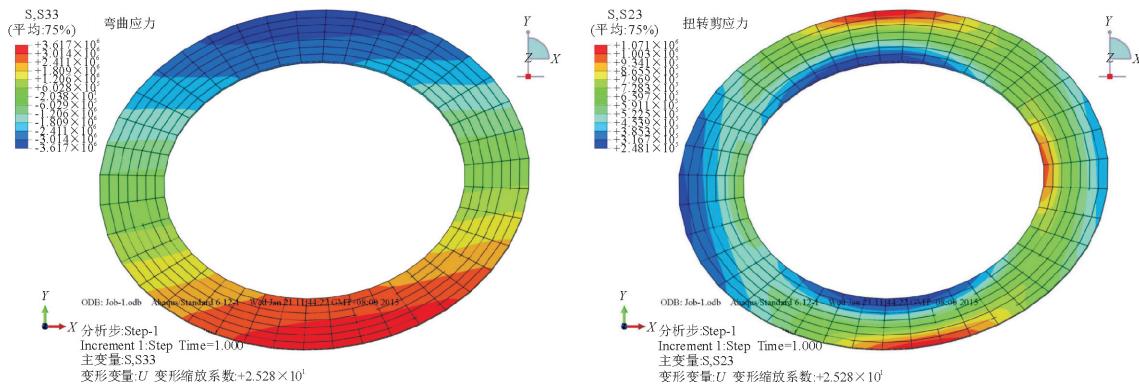


图8 椭圆树干椭圆树洞树干应力云图

Fig. 8 The stress nephogram of elliptical stem with an elliptical hollow

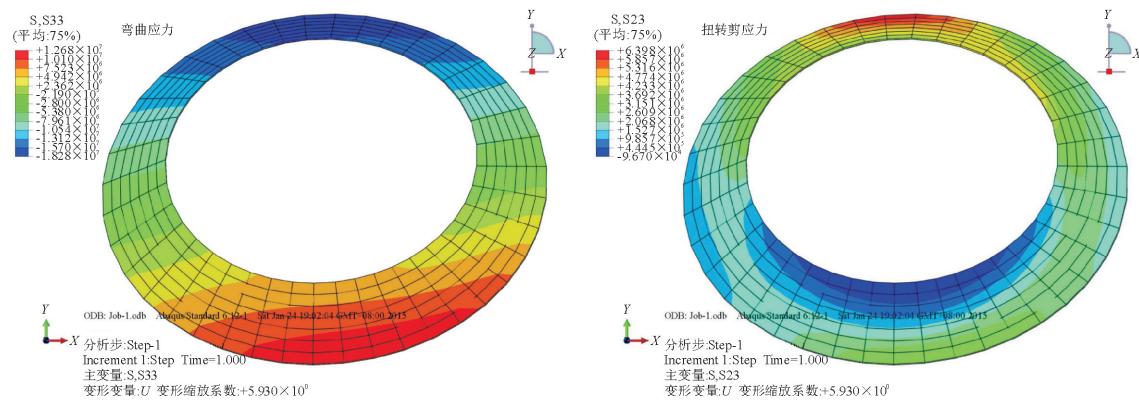


图9 椭圆树干偏心椭圆树洞树干应力云图

Fig. 9 The stress nephogram of elliptical stem with an eccentric elliptical hollow

证明了树木达到一定的偏冠程度后,会因树干空洞的增加,树木先发生扭转破坏,造成树干整体刚度的降低再引发树干折断。

3.2 讨论

利用有限元对树木强度分析主要集中于树木的动力学研究,D. Sellier *et al*^[21] 基于枝条的动力学效证明了树木达到一定的偏冠程度后,会因树干空洞的增加,树木先发生扭转破坏,造成树干整体刚度的降低再引发树干折断。应建立树木模型并预测树木的风激响应,J. R. Moore *et al*^[22] 建立了花旗松有限元模型分析树冠质量对其自振频率的影响,艾晓秋等^[14] 建立香樟行道树的有限元模型分析城市行道树动力学特性与风致破坏影响,而基于树木树干作为各向异性材料,从静力学方向利用有限元分析树干破坏方式则鲜有研究。

本研究基于测定的黄山松力学性质,就不同形状的树干以及树洞在树干内部不同位置利用有限元建立相应的数值模拟模型进行了数据分析。图6为圆形树干偏心圆形树洞树高1.3 m处弯曲应力和扭转剪应力云图,显示最薄处、最外层的弯曲应力和扭转剪应力最大,当外载荷增加,即可提取出最薄处、最外层的节点应力值与材料的弯曲强度和顺纹剪切强度进行比较,判定可能发生的破坏方式。图

7为椭圆树干圆形树洞树高1.3 m处弯曲应力和扭转剪应力云图,图8为椭圆树干椭圆树洞树高1.3 m处弯曲应力和扭转剪应力云图,图9为椭圆树干偏心椭圆树洞树高1.3 m处弯曲应力和扭转剪应力云图,从应力云图中均能直观地发现树干承受的最大弯曲应力和扭转剪应力所处位置和大小,帮助分析树干可能发生的破坏方式。

自然环境中,树干形状并非规则的圆形、椭圆形,而且树干腐朽空洞也呈现不同形状,基于纯理论计算外载荷下树干指定位置处的弯曲和扭转剪应力将非常复杂,有限元方法的出现能很好地帮助解决计算难题。同时,随着科技的发展,各种树木应力波扫描仪^[23-24] 可以对树体内部的腐朽空洞大小、形状进行确认,同时高精度激光三维扫描技术^[25-26] 可以建立与真实树干仿真性极高的树干三维模型,下一步,结合上述技术建立个体真实情况的腐朽空洞树干有限元模型并进行力学强度分析,将对古树名木、大树、行道树安全性评估具有更加积极的现实意义。

参考文献:

- [1] PETTY J A, WORRELL R. Stability of coniferous tree stems in relation to damage by snow [J]. Forestry, 1981, 54(2): 115-128.
- [2] KOHNLE U, GAUCKLER S. Vulnerability of forests to storm

- damage in a forest district of south western Germany situated in the periphery of the 1999 storm (Lothar)[C]//RUCK B, KOTTMEIER C, MATTHECK C, et al. Proceedings international conference ‘wind effects on trees’. University of Karlsruhe, Germany, 2003.
- [3] RODGERS M, CASEY A, MCMENAMIN C, et al. An experimental investigation of the effects of dynamic loading on coniferous trees planted on wet mineral soils[M]//COUTTSN M P, GRACE J. Wind and trees. Cambridge: Cambridge University Press, 1995.
- [4] KOLLMANN F, CÔTÉ WA. Principles of wood science and technology. volume i: solid wood [M]. New York: Springer Verlag, 1968.
- [5] MATTHECK C, BETHGE K, TESARI I. Shear effects on failure of hollow trees[J]. Trees, 2006, 20: 329-333.
- [6] 邵卓平, 吴贻军, 黄天来, 等. 风灾害下树木强度分析的理论、方法及应用[J]. 林业科学, 2017, 53(5): 170-178.
- SHAO Z P, WU Y J, HUANG T L, et al. Theory and method of tree stem strength analysis under wind disaster and its application [J]. Scientia Silvae Sinicae, 2017, 53(5): 170-178. (in Chinese)
- [7] PELTOLA H. Mechanical stability of trees under static loads [J]. American Journal of Botany, 2006, 93(10): 1501-1511.
- [8] GARDINER B, BYME K, HALE S, et al. A review of mechanistic modelling of wind damage risk to forests [J]. Forestry, 2008, 81: 447-463.
- [9] 李秀芬, 朱教君, 王庆礼, 等. 森林的风/雪灾害研究综述[J]. 生态学报, 2005, 25(1): 148-157.
- LI X F, ZHU J J, WANG Q L, et al. Forest damage induced by wind/snow: a review [J]. Acta Ecologica Sinica, 2005, 25(1): 148-157. (in Chinese)
- [10] 岳小泉, 王立海, 葛晓雯. 风荷载作用下树木力学特性研究进展[J]. 森林工程, 2015, 31(6): 33-36, 40.
- YUE X Q, WANG L H, GE X W. Research progress of mechanical properties of trees under wind load action[J]. Forest Engineering, 2015, 31(6): 33-36, 40. (in Chinese)
- [11] PELTOLA H, KELLOM ÄKI S, HASSINEN A, et al. Mechanical stability of scots pine, norway spruce and birch: an analysis of tree pulling experiments in Finland[J]. Forest Ecology and Management, 2000, 135: 143-153.
- [12] KANE B, PAVLIS M, SEILER J R, et al. Crown reconfiguration and trunk stress in deciduous trees[J]. Canadian Journal of Forest Research, 2008, 38: 1275-1289.
- [13] PETTY J A, SWAIN C. Factors influencing stem breakage in conifers in high winds[J]. Forestry, 1985, 58(1): 75-84.
- [14] 艾晓秋, 彭勇波, 承颖瑶. 城市行道树动力学特性与风致破坏分析[J]. 自然灾害学报, 2018, 27(1): 27-32.
- AI X Q, PENG Y B, CHENG Y Y. Wind-induced failure and dynamical behaviors of urban trees[J]. Journal of Natural Disasters, 2018, 27(1): 27-32. (in Chinese)
- [15] 张鳌, 冀晓东, 丛旭, 等. 基于线性滤波法的单株林木抗风有限元模拟[J]. 北京林业大学学报, 2016, 38(2): 1-9.
- ZHANG A, JI X D, CONG X, et al. Finite element modeling of wind resistance of single trees based on linear filtering method[J]. Journal of Beijing Forestry University, 2016, 38(2): 1-9. (in Chinese)
- [16] 胡潇毅, 陶伟明, 郭乙木. 考虑耦合效应的风场中摇曳树木模拟[J]. 浙江大学学报: 工学版, 2008, 42(7): 1123-1127.
- HU X Y, TAO W M, GUO Y M. Simulation of swaying tree in wild field considering coupling effect [J]. Journal of Zhejiang University: Engineering Science, 2008, 42(7): 1123-1127. (in Chinese)
- [17] 王巍, 程玉龙, 王博, 等. 基于 ANSYS-DYNA 的松木座椅冲击仿真分析[J]. 西北林学院学报, 2018, 33(1): 257-261.
- WANG W, CHENG Y L, WANG B, et al. Impact simulation analysis of solid wood chair based on ANSYS-DYNA [J]. Journal of Northwest Forestry University, 2018, 33(1): 257-261. (in Chinese)
- [18] 胡文刚, 关惠元. 椭圆榫节点抗弯强度的数值分析研究[J]. 西北林学院学报, 2018, 33(5): 225-230.
- HU W G, GUAN H Y. Numerical study on the bending strength of oval mortise and tenon joint [J]. Journal of Northwest Forestry University, 2018, 33(5): 225-230. (in Chinese)
- [19] 林杰俊, 刘军, 李涛, 等. 温度对合金钢 40CrNiMoA 静力学常数的影响[J]. 热加工工艺, 2021, 50(22): 34-37.
- LIN J J, LIU J, LI T, et al. Effect of temperature on static constants of alloy steel 40CrNiMoA[J]. Hot Working Technology, 2021, 50(22): 34-37. (in Chinese)
- [20] BOND J. Foundations of tree risk analysis: use of the t/R ratio to evaluate trunk failure potential[J]. Arborist New, 2006, 15(6): 31-34.
- [21] SELLIER D, BRUNET Y, FOURCAUD T. A numerical model of tree aerodynamic response to a turbulent airflow[J]. Forestry, 2008, 81(3): 279-297.
- [22] MOORE J R, MAGUIRE D A. Simulating the dynamic behavior of douglas-fir trees under applied loads by the finite element method[J]. Tree Physiology, 2008, 28(1): 75-83.
- [23] 吴福社, 吴贻军, 邵卓平. 应力波仪和阻力仪用于雪松立木内部材性检测的研究[J]. 安徽农业大学学报, 2011, 38(1): 127-130.
- WU F S, WU Y J, SHAO Z P. Determination of cedar sample interior characteristics based on stress wave and resistograph [J]. Journal of Anhui Agricultural University, 2011, 38(1): 127-130. (in Chinese)
- [24] 刘星旦, 康永祥, 甘明旭, 等. 黄帝陵古侧柏树干心腐研究[J]. 西北林学院学报, 2017, 32(2): 180-187.
- LIU X D, KANG Y X, GAN M X, et al. A study on trunk decay of ancient *Platycladus orientalis* in tomb of Yellow Emperor [J]. Journal of Northwest Forestry University, 2017, 32(2): 180-187. (in Chinese)
- [25] 邓洁茹, 王峰. 基于三维激光扫描技术的树木枝干建模研究[J]. 城市勘测, 2017(2): 109-113.
- DENG J R, WANG F. Trunk modeling based on 3D laser scanning technology [J]. Urban Geotechnical Investigation & Surveying, 2017(2): 109-113. (in Chinese)
- [26] 杨玉泽, 张珊珊, 林文树. 依据地面三维激光扫描及点云数据建立的白桦树干削度方程[J]. 东北林业大学学报, 2018, 46(12): 58-63.
- YANG Y Z, ZHANG S S, LIN W S. Stem taper function of *Betula platyphylla* with terrestrial 3D laser scanning[J]. Journal of Northeast Forestry University, 2018, 46(12): 58-63. (in Chinese)